

## Mealy-Automaten

Die **Mealy-Automaten** gehören zur Familie der endlichen Automaten. Manchmal werden Sie auch als Mealy-Maschinen bezeichnet. Anders als bei den deterministischen endlichen Automaten (DEA) besteht ihre Aufgabe jedoch nicht im Erkennen bzw. Akzeptieren eines Wortes, sondern darin, eine Eingabe in eine Ausgabe zu transformieren. Man spricht bei den Mealy-Automaten daher von **Transduktoren**. Die schematische Darstellung eines endlichen Automaten erweitern wir für die Mealy-Automaten daher um eine Ausgabe (s. Abbildung 1).



Abbildung 1: Schematische Darstellung eines Mealy-Automaten

Mealy-Automaten eignen sich damit zur Modellierung von technischen Systemen, die Eingaben z. B. in Form von Sensorwerten erhalten und darauf mit einer Ausgabe reagieren.

### Definition eines Mealy-Automaten

Abbildung 2 zeigt ein Beispiel für einen Mealy-Automaten, der die Steuerung eines Fahrstuhls in einem Haus mit drei Stockwerken modelliert.

#### Aufgabe 1:

- a) Vergleichen Sie den Zustandsübergangsgraphen des Mealy-Automaten mit dem eines DEA. Geben Sie sowohl die Gemeinsamkeiten als auch die Unterschiede an.

**Hinweis:** Die farbliche Kennzeichnung der Zustände und Übergänge dient nur der besseren Lesbarkeit und ist kein Bestandteil des Modells.

- b) Beschreiben Sie die Funktionsweise der Fahrstuhlsteuerung in Ihren eigenen Worten.

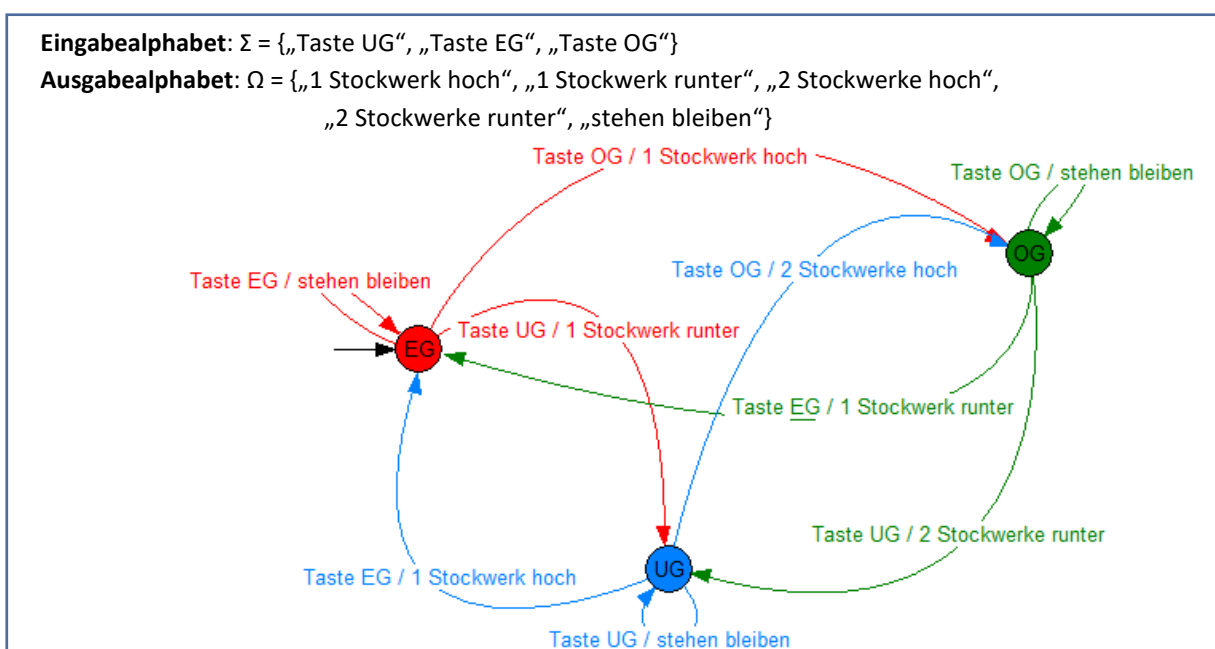


Abbildung 2: Mealy-Automat zur Modellierung einer Fahrstuhlsteuerung

Wie ein DEA besteht ein Mealy-Automat aus einer **Menge von Zuständen** und einem **Startzustand**, in dem der Automat mit der Arbeit beginnt.

Der Mealy-Automat für die Fahrstuhlsteuerung kann drei verschiedene Zustände annehmen: *UG*, *EG* und *OG*. Mit diesen merkt sich der Automat, ob der Fahrstuhl sich gerade im Untergeschoss (*UG*), im Erdgeschoss (*EG*) oder im Dachgeschoss (*DG*) befindet. Als Startzustand wurde hier der Zustand *EG* gewählt. Die Inbetriebnahme des Fahrstuhls muss also im Erdgeschoss erfolgen.

Die Endzustände entfallen bei einem Mealy-Automaten, da kontinuierlich weitere Eingaben erfolgen können, auf die der Automat entsprechend reagiert. Die Verarbeitung endet somit nicht. Der Automat kann lediglich in den Startzustand zurückversetzt werden. Das können wir uns wie eine Art *Reset* vorstellen.

Da ein Mealy-Automat für jedes Eingabezeichen ein Ausgabezeichen ausgibt, kommt zum **Eingabealphabet  $\Sigma$**  das **Ausgabealphabet  $\Omega$** <sup>1</sup> hinzu, in dem alle Ausgabezeichen des Automaten enthalten sind. Ein- und Ausgabezeichen sind bei der Modellierung technischer Geräte etwas allgemeiner zu verstehen als bei einem DEA<sup>2</sup>. So besteht das Eingabealphabet im Beispiel aus drei verschiedenen Tasten, die gedrückt werden können. Das Ausgabealphabet besteht aus den möglichen Bewegungen des Fahrstuhls.

Zur **Zustandsübergangsfunktion**, welche einer Kombination aus aktuellem Zustand und Eingabezeichen einen Folgezustand zuordnet, kommt die **Ausgabefunktion** hinzu. Diese ordnet einer Kombination aus aktuellem Zustand und Eingabezeichen das jeweilige Ausgabezeichen zu. Die Zustandsübergänge sind daher nach dem Muster „Eingabe/Ausgabe“ beschriftet. Zur Vereinfachung darf eine Ausgabe auch aus mehreren Zeichen des Ausgabealphabets bestehen.

Der Zustandsübergangsgraph eines Mealy-Automaten muss wie beim DEA **deterministisch** und **vollständig** sein. Das heißt, es müssen für jede Kombination aus Zustand und Eingabe genau ein Folgezustand und in diesem Fall auch genau eine Ausgabe definiert sein.

Der Automat arbeitet nun eine Folge von Eingaben sukzessive ab, wobei er abhängig von der Eingabe und dem aktuellen Zustand in einen Folgezustand wechselt und dabei eine Ausgabe produziert. Der Fahrstuhl verfügt über drei Tasten, mit denen das Ziel angegeben werden kann. Aus der Reihenfolge, in der diese Tasten gedrückt werden, ergibt sich somit die Eingabe für den Automaten, z.B. „Taste *UG*“, „Taste *OG*“, „Taste *UG*“, „Taste *EG*“, „Taste *EG*“, „Taste *OG*“. In Abhängigkeit des Zustands, in dem sich der Fahrstuhl gerade befindet, und der gedrückten Taste, entscheidet der Automat nun, wie viele Stockwerke der Fahrstuhl nach oben oder nach unten fahren muss (das ist die Ausgabe) und in welchen Zustand er als nächstes wechseln muss. Befindet sich der Automat zu Beginn in Zustand *EG* und lautet die Eingabe „Taste *UG*“, so muss dem roten Pfeil mit der Eingabe „Taste *UG*“ gefolgt werden. Dieser Übergang bewirkt, dass der Fahrstuhl 1 Stockwerk nach unten fährt (Ausgabe) und in den Zustand *UG* wechselt.

<sup>1</sup> Die Ergänzende Hinweise zum Kerncurriculum INFORMATIK für das Abitur in Niedersachsen sehen für das Ausgabealphabet den griechischen Buchstaben  $\Omega$  vor. In der Literatur findet man für das Ausgabealphabet jedoch häufig den griechischen Buchstaben  $\Delta$ . Diesen verwenden auch die Softwarewerkzeuge [AtoCC](https://ato.cc) bzw. [flaci.com](https://flaci.com).

<sup>2</sup> Bei der Modellierung ist es sinnvoll Eingaben, häufig sind dies Sensoreingaben, und Ausgaben, in der Regel Aktionen des technischen Geräts, für uns Menschen verständlich zu benennen. Erst bei der Transformation in eine entsprechende technische Schaltung, würde man die Ein- und Ausgaben binär codieren.

**Aufgabe 2:** Geben sie die Konfigurationsfolge des Mealy-Automaten aus Abbildung 2 für die Eingabe „Taste UG“, „Taste OG“, „Taste UG“, „Taste EG“, „Taste EG“, „Taste OG“ an. Berücksichtigen Sie dabei sowohl die eingenommenen Zustände als auch die Ausgaben.

Die Ausgabe „stehen bleiben“ bedeutet im Mealy-Automaten für die Fahrstuhlsteuerung eigentlich, dass der Fahrstuhl keine Aktion ausführt. Man könnte also auch sagen, dass es keine Ausgabe gibt. Da das Verhalten des Automaten vollständig definiert sein muss, darf dieser Fall aber nicht einfach weggelassen werden. Die Ausgabe kann aber als *keine Ausgabe* oder *leer* angegeben werden. Dies wird im allgemeinen mit dem Symbol  $\varepsilon^3$  ausgedrückt, welches Sie vielleicht im Zusammenhang mit den formalen Sprachen bereits als das leere Wort kennengelernt haben. Der Zustandsübergangsgraph für die Fahrstuhlsteuerung sähe dann wie in Abbildung 3a aus.

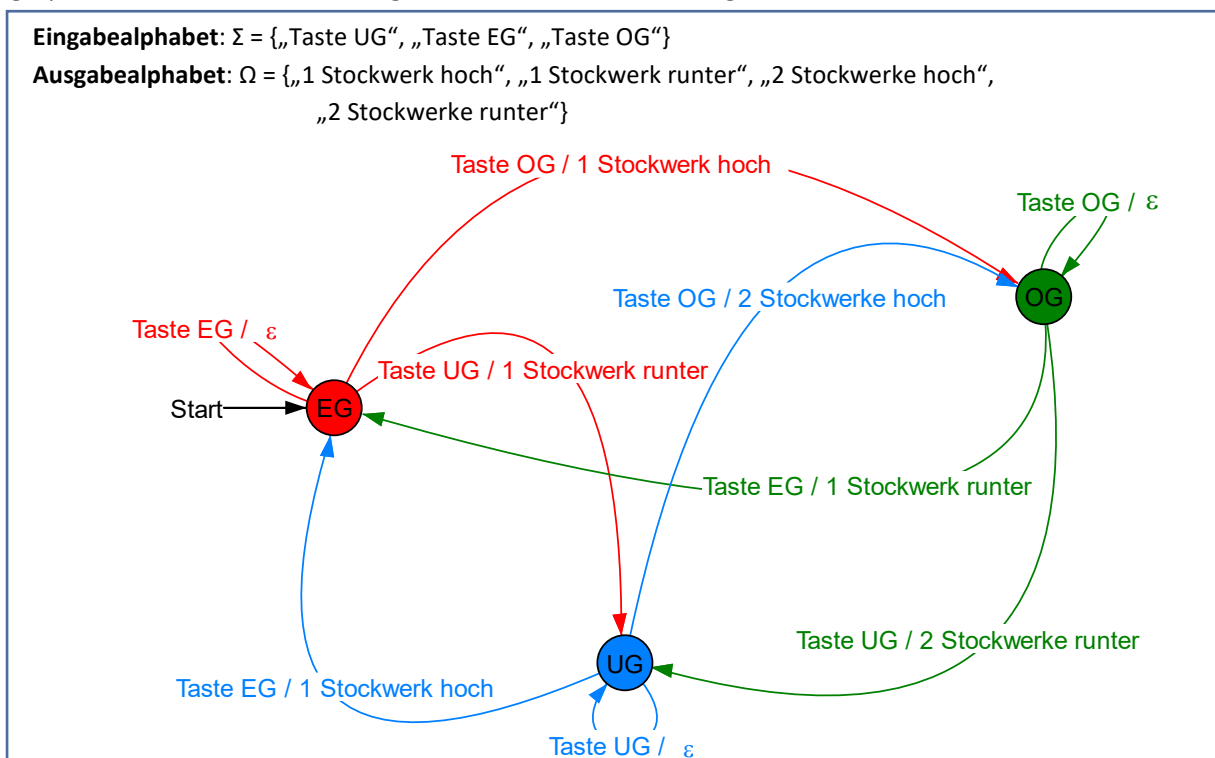


Abbildung 3: Mealy-Automat zur Simulation einer Fahrstuhlsteuerung mit leerer Ausgabe

## Modellierung verschiedener technischer Systeme mithilfe von Mealy-Automaten

Wie wir nun gesehen haben, eignen sich Mealy-Automaten, um die Funktionsweise von technischen Systemen zu modellieren, die auf Eingaben, häufig Sensoreingaben, mit Ausgaben reagieren. Viele solcher Systeme finden wir im Haushalt.

**Aufgabe 3:** Die Steuerung einer Lampe, die mit einem einzigen Tastschalter sowohl an- als auch ausgeschaltet wird, soll mithilfe eines Mealy-Automaten modelliert werden.

Das Eingabealphabet eines entsprechenden Mealy-Automaten besteht also nur aus der Eingabe „Taster gedrückt“. Eingabealphabet:  $\Sigma = \{ \text{„Taster gedrückt“} \}$

- Legen Sie ein geeignetes Ausgabealphabet fest.
- Stellen Sie den Mealy-Automaten, der die Steuerung der Lampe modelliert, in Form eines Zustandsübergangsgraphen dar.

<sup>3</sup> Alternativ kann für „keine Ausgabe“ auch die Abkürzung k. A. oder einfach ein Strich – verwendet werden.

Weitere Beispiele für technische Geräte, die sich gut mithilfe eines Mealy-Automaten modellieren lassen, sind zum Beispiel: Blinklichter mit verschiedenen Modi, eine elektrische Zahnbürste, die Lautstärkeregelung oder Songauswahl eines einfachen MP3-Players oder die Steuerung eines Wasserkochers mit verschiedenen Wunschttemperaturen.

**Aufgabe 4:** Arbeitsteilige Gruppenarbeit mit Museumsrundgang

- Bilden Sie Arbeitsgruppen mit drei bis vier Schüler\*innen und teilen Sie die oben genannten technischen Geräte unter den Gruppen auf. Idealerweise sollten Sie ein Anschauungsobjekt zur Verfügung haben. Sie können daher auch andere geeignete Geräte hinzunehmen.
- Fertigen Sie ein Plakat mit einem Mealy-Automaten an, der die Steuerung des Ihnen zugeteilten Gerätes modelliert. Beschränken Sie sich dabei ggf. auf ausgewählte Funktionen des Gerätes.
- Führen Sie einen Museumsrundgang durch. Vergleichen Sie die Funktionsweise des technischen Gerätes mit der Modellierung als Mealy-Automat. Geben Sie sich gegenseitig Rückmeldungen.
- Formulieren Sie Regeln, die bei der Modellierung eines technischen Gerätes mithilfe eines Mealy-Automaten zu beachten sind. Wann wird beispielsweise ein neuer Zustand benötigt?

**Aufgabe 5:** Die Steuerung eines Mixers soll mithilfe eines Mealy-Automaten modelliert werden. Der Motor des Mixers verfügt über vier verschiedene Leistungsstufen. Zwischen den Leistungsstufen kann durch Drücken der Tasten ▲ (rauf) bzw. ▼ (runter) gewechselt werden. Zu Beginn ist der Motor ausgeschaltet. Einmaliges Drücken der Taste ▲ schaltet den Mixer in Leistungsstufe 1 ein. Wird in Leistungsstufe 1 die Taste ▼ betätigt, schaltet sich der Mixer aus.

- Entwerfen Sie einen Mealy-Automaten, der die Steuerung des Mixers modelliert. Legen Sie zunächst ein geeignetes Ein- und ein geeignetes Ausgabealphabet fest.
- Um Verletzungen zu vermeiden, verfügt der Mixer über einen Sensor, der registriert, ob die Rührbesen frei rühren können oder ob sie von größeren Teilen (z. B. Fingern) blockiert werden. Wenn der Sensor eine Blockade meldet, schaltet sich der Motor aus. Sobald die Blockade entfernt wurde, schaltet sich der Motor in der aktuellen Leistungsstufe wieder ein. Erweitern Sie Ihren Mealy-Automaten aus Aufgabenteil a) entsprechend.

## Mealy-Automaten als Modell für Verkaufsautomaten

Mealy-Automaten eignen sich auch gut als Modell für Verkaufsautomaten aller Art, beispielsweise für Getränke-, Süßigkeiten- oder Fahrkartenautomaten. Abbildung 4 zeigt beispielsweise die schematische Darstellung eines Süßigkeitenautomaten.

**Aufgabe 6:** Abbildung 5 auf der nächsten Seite zeigt den Zustandsübergangsgraphen eines Mealy-Automaten, der die Funktionsweise des Süßigkeitenautomaten aus Abbildung 4 modelliert. *T Schoko* steht dabei für das Drücken der Taste Schokoriegel, *T Gummi* für das Drücken der Taste Gummibärchen.

- Geben Sie das Ein- und das Ausgabealphabet für den Zustandsübergangsgraphen in Abb. 5 an.
- Beschreiben Sie die in Abbildung 5 dargestellte Funktionsweise des Süßigkeitenautomaten in Ihren eigenen Worten.
- Diskutieren Sie Optimierungsmöglichkeiten für den Süßigkeitenautomaten.
- Es gibt auch Verkaufsautomaten, bei denen zuerst das gewünschte Produkt ausgewählt wird und anschließend der entsprechende Betrag eingezahlt werden muss. Diskutieren Sie Vor- und Nachteile dieser Vorgehensweise in Bezug auf die Modellierung als Mealy-Automat.

**Aufgabe 7:** Ein Getränkeautomat bietet heißes Teewasser für 30 Cent sowie Kaffee oder Espresso für jeweils 50 Cent. Weiterhin verfügt der Automat über eine Abbruchtaste. Entwerfen Sie einen Mealy-Automaten, der die Funktionsweise des Getränkeautomaten modelliert. Begründen Sie Ihre Modellierungsentscheidungen.

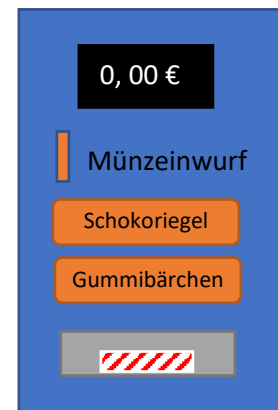


Abbildung 4:  
Süßigkeitenautomat

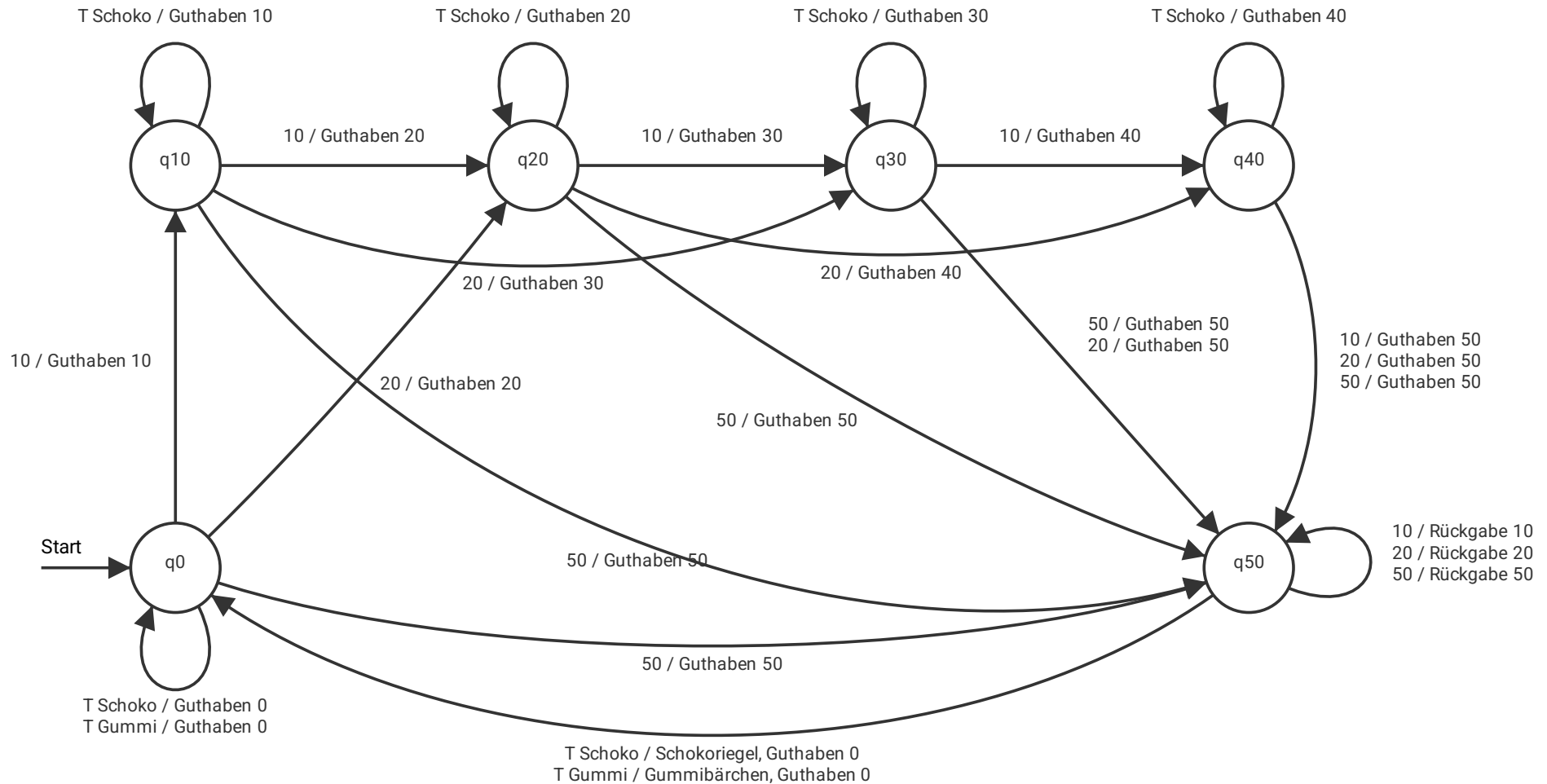


Abbildung 5: Zustandsübergangsgraph, der die Funktionsweise des Süßigkeitenautomaten in Abbildung 4 modelliert. Zur Vereinfachung wird die Ausgabe am Übergang von  $q_{50}$  zu  $q_0$  aus zwei Ausgabebezeichnungen zusammengesetzt.

## Codierung mithilfe von Mealy-Automaten

Bei der Codierung müssen Eingabezeichen in Ausgabezeichen transformiert werden. Viele Vorgänge im Zusammenhang mit Codierungsverfahren lassen sich daher gut mithilfe von Mealy-Automaten modellieren.

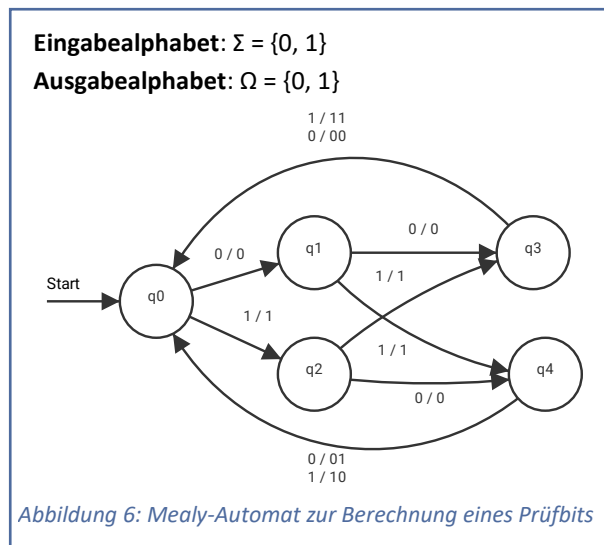
**Aufgabe 8:** Der ASCII-Code hat ursprünglich nur 127 Zeichen codiert. Dafür reichen sieben Bit aus. Da Daten aber in der Regel in Blöcken von mindestens acht Bit gespeichert oder übertragen werden, steht noch ein zusätzliches Bit zur Verfügung. Dieses Bit kann daher als *Prüfbit* verwendet werden, um Fehler bei der Datenübertragung zu erkennen. Die sieben Bit des ASCII-Codes werden dabei so ergänzt, dass die Anzahl der Einsen gerade ist<sup>4</sup>.

Abbildung 6 zeigt einen Mealy-Automaten, der für einen Code aus drei Bit ein entsprechendes viertes Prüfbit ergänzt.

- Zeigen Sie für die Eingaben 001, 101 und 111, dass der Automat in Abbildung 6 den passenden vierstelligen Code mit gerader Anzahl Einsen ausgibt.
- Erweitern Sie den Mealy-Automaten in Abbildung 6 so, dass er zu einem 7-Bit-ASCII-Code den 8-Bit-ASCII-Code ausgibt.

**Aufgabe 9:** Ein Graustufenbild, bei dem jedes Pixel mit acht Bit codiert ist, soll in ein reines Schwarz-Weiß-Bild umgewandelt werden. Alle Pixel, die einen Farbwert von 128 oder höher haben, werden weiß. Alle Pixel, die einen Farbwert von 127 oder niedriger haben, werden schwarz. Für die Codierung des Schwarz-Weiß-Bildes soll nur noch ein Bit pro Pixel verwendet werden (1 = weiß, 0 = schwarz).

- Entwerfen Sie einen Mealy-Automaten, der für die 8-Bit-Codierung eines Graustufenbildes die passende 1-Bit-Codierung des Schwarz-Weiß-Bildes ausgibt. Erläutern Sie den Aufbau Ihres Automaten.
- Ein Mealy-Automat, der nur einen einzelnen 8-Bit-Grauwert auf einen 1-Bit-Schwarz/Weiß-Wert reduziert, kommt mit weniger Zuständen aus als der Automat in Aufgabenteil a). Verändern Sie Ihren Mealy-Automaten entsprechend. Verwenden Sie dabei möglichst wenig Zustände.
- Die Lauflängencodierung ist ein gängiges Verfahren zur Kompression von Schwarz-Weiß-Grafiken. Erläutern Sie, warum ein Mealy-Automat zum Erzeugen einer Lauflängencodierung ungeeignet ist.



<sup>4</sup> Später wurde das achte Bit in der Regel zur Erweiterung des Zeichensatzes verwendet.

**Aufgabe 10:** Abbildung 7 zeigt einen Huffman-Baum.

- Decodieren Sie den Text 111001111100010 01001111 0000100011 000101011 mithilfe des Huffman-Baums in Abbildung 7.
- Entwerfen Sie einen Mealy-Automaten, der einen beliebigen Text, der mit dem Huffman-Baum in Abbildung 7 codiert wurde, decodiert.

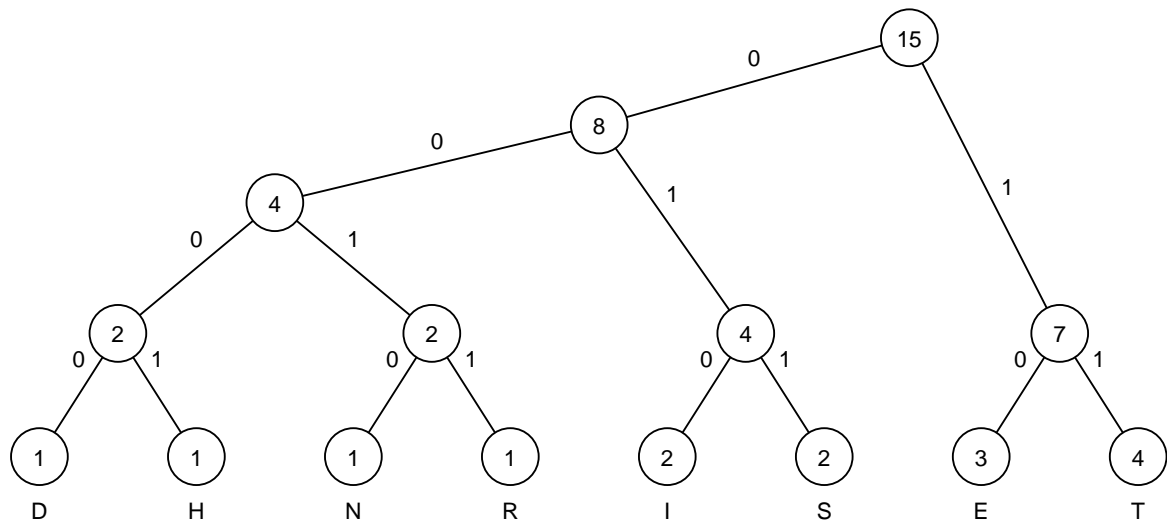


Abbildung 7: Huffman-Baum zu Aufgabe 10

**Aufgabe 11:** Bei der polyalphabetischen Substitution kommen mehrere Geheimtextalphabetete zum Einsatz. Vereinfachend gehen wir hier davon aus, dass unser Klartextalphabet nur aus den Buchstaben {E, N, T} besteht. Für die Verschlüsselung sollen alternierend drei verschiedene Geheimtextalphabetete bzw. Zuordnungen zwischen Klar- und Geheimtextzeichen zum Einsatz kommen.

- (1)  $E \rightarrow A, N \rightarrow B, T \rightarrow C$
- (2)  $E \rightarrow B, N \rightarrow C, T \rightarrow A$
- (3)  $E \rightarrow C, N \rightarrow A, T \rightarrow B$

- Entwerfen Sie einen Mealy-Automaten, der für ein Wort über dem Klartextalphabet eine entsprechende polyalphabetische Substitution durchführt.
- Verschlüsseln Sie die Wörter NETT und ENTEN mithilfe ihres Mealy-Automaten.
- Erläutern Sie, wie der Automat verändert werden müsste, damit er eine entsprechende Entschlüsselung durchführt?

### Ausblick: Mealy-Automaten in der technischen Informatik

Mealy-Automaten werden in der technischen Informatik verwendet, um Schaltwerke zu entwerfen. Ein Schaltwerk, das eine bestimmte Aufgabe übernehmen soll, besteht aus festverdrahteten Bauteilen und wird speziell für diese Aufgabe konstruiert. Man findet sie in einfachen technischen Geräten z. B. Blinklichtern. Sie können aber auch Teil von komplexeren technischen Systemen, wie z. B. einer Waschmaschine, einem Kühlschrank, einem DVD-Player, einem Router, einem Auto oder einem Flugzeug sein. Hier arbeiten jedoch oft unterschiedliche Schaltwerke in einem größeren, meist auch programmierbaren System zusammen.

Alle Mealy-Automaten, die Sie bereits konstruiert haben, können als Grundlage für die Konstruktion eines speziellen Schaltwerks dienen.



## Zähler

Der Mealy-Automat in Abbildung 8 modelliert einen **Modulo-5-Zähler**, der von 0 bis 4 zählt und anschließend wieder bei 0 beginnt. Als Eingabe erhält der Automat ein Taktsignal. Der Automat zählt eins weiter, wenn das Taktsignal auf 1 wechselt (Eingabe T). Der Zähler ruht, wenn das Taktsignal unverändert ist oder auf 0 wechselt. Diese Fälle werden im Modell nicht explizit dargestellt. Der Automat hat somit das Eingabealphabet  $\Sigma = \{T\}$  und das Ausgabealphabet



**Aufgabe 13:** Ein taktgesteuertes Blinklicht hat einen Tastschalter, mit dem es von außen sowohl ein- und ausgeschaltet werden kann. Um das Blinken zu realisieren, erhält es als zusätzliche Eingabe ein internes Taktsignal, wie Sie es bereits für den Zähler verwendet haben.

- a) Entwerfen Sie einen Mealy-Automaten für das taktgesteuertes Blinklicht.
- b) Entwerfen Sie einen Mealy-Automaten für ein taktgesteuertes Blinklicht, das nach Aktivierung genau dreimal an- und ausgeht.
- c) Das Blinklicht soll nun in verschiedenen Modi blinken können. Der Wechsel zwischen den Modi erfolgt weiterhin über einen einzigen Tastschalter. Bei jedem Tastendruck wechselt das Blinklicht in den nächsten Modus.
  - Modus 0: aus
  - Modus 1: schneller Wechsel zwischen blau und rot
  - Modus 2: langsamer Wechsel zwischen blau und rot
  - Modus 3: schneller Wechsel zwischen blau, rot und grün

Entwerfen Sie einen Mealy-Automaten, der das Blinklicht als taktgesteuertes System modelliert.

## Serieller Komparator

Der Mealy-Automat in Abbildung 9 modelliert einen Komparator, der zwei Binärzahlen vergleicht. Die Binärzahlen werden seriell, also Ziffer für Ziffer eingelesen (beginnend bei der letzten Stelle, also den Einern), so dass die Zahlen beliebig lang sein können. Die kürzere Zahl wird der Einfachheit halber vorne mit Nullen aufgefüllt, so dass die beiden Zahlen gleich viele Stellen besitzen. Beim Einlesen der Zahlen können somit die Kombinationen 00, 01, 10 und 11 auftreten. Damit ergibt sich das Eingabealphabet  $\Sigma = \{00, 01, 10, 11\}$ . Mögliche Ausgaben sind  $<$ ,  $>$  oder  $=$ , je nachdem, ob die erste Zahl kleiner, größer oder gleich der zweiten ist.

Die Ausgabe gibt das Verhältnis der beiden Zahlen bis zur eingelesenen Ziffer an. Entscheidend ist also nur das letzte Ausgabezeichen, da die vorherigen Ausgaben nur vorläufige Zwischenergebnisse darstellen. Betrachten wir ein Beispiel: Die beiden binären Eingabezahlen 001100 und 101010 werden von rechts nach links eingegeben. Dabei ergibt sich von links nach rechts gelesen die Ausgabe  $= < > > <$ . Erst das letzte Ausgabezeichen  $<$  zeigt das Endergebnis an, nämlich dass die erste Zahl kleiner als die zweite ist. Im Folgenden ist das Beispiel noch einmal als Abfolge der Konfigurationen dargestellt. Die Eingabezahlen wurden dabei umgedreht, so dass die Verarbeitung wie gewohnt von links nach rechts erfolgen kann.

$$(q=, 001100) \xrightarrow{=} (q=, 01100) \xrightarrow{<} (q<, 1100) \xrightarrow{>} (q>, 100) \xrightarrow{>} (q>, 00) \xrightarrow{>} (q>, 0) \xrightarrow{<} (q<, \epsilon)$$

### Aufgabe 14:

- Vergleichen Sie die Binärzahlen 1100 und 1001 mithilfe des Mealy-Automaten in Abbildung 9.
- Verändern Sie den Zustandsübergangsgraphen des Mealy-Automaten in Abbildung 9 so, dass die Zahlen von links nach rechts, also beginnend beim höchstwertigen Bit, verarbeitet werden.

**Aufgabe 15:** Entwerfen Sie einen Mealy-Automaten für einen seriellen Addierer, der zwei Binärzahlen beliebiger, aber gleicher Länge addiert.

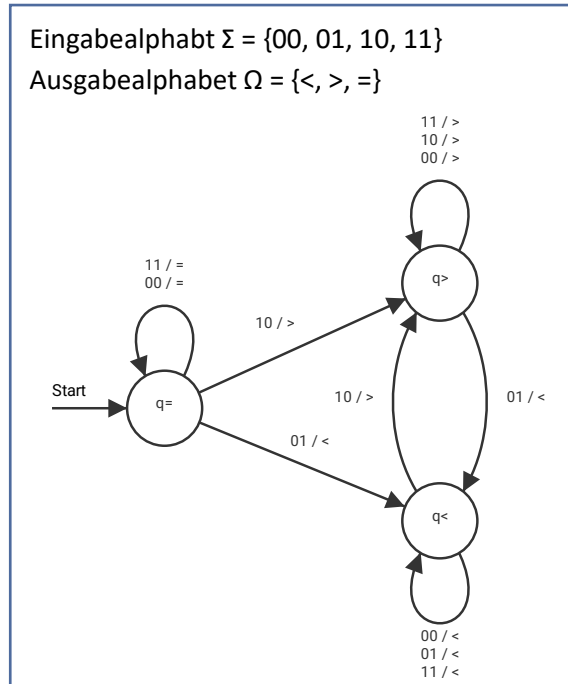


Abbildung 9: Mealy-Automat eines seriellen Komparators

## Hinweis

Die Materialien erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich der für die Abiturprüfung erwarteten Kompetenzen. Verbindlich für das Abitur in Niedersachsen sind allein das niedersächsische Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe sowie die ergänzenden Hinweise in der jeweils aktuellen Fassung.

## Lizenz

Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#). Von der Lizenz ausgenommen ist das InfSII-Logo.

## Abbildungsnachweise:

Abbildung 1 und 4 wurden mithilfe von Formen und Piktogrammen in Microsoft Word 2016 erstellt.

Abbildung 7 wurde mithilfe der Software yed in der Version 3.19.1.1 erstellt:

<http://www.yWorks.com>

Die Abbildungen 2, 3, 5, 6, 8 und 9 wurden mithilfe der Software AtoCC bzw. FLACI.com erzeugt.

AtoCC wird von Michael Hielscher unter einer CC BY-NC-ND 2.0 DE Lizenz zur Verfügung gestellt:

[www.atocc.de](http://www.atocc.de)

FLACI.com wird von der Pädagogischen Hochschule Schwyz kostenlos für Bildungszwecke zur Verfügung gestellt: <https://flaci.com>